ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΟΛΗ ΧΡΙΣΤΙΝΑ
9^{O} Γυμνάσιο Αθηνών
Σχολικό Έτος
2016-2017

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ: λέγεται η διαδικασία κατά την οποία ένα πολυώνυμο (ή γενικότερα ένα άθροισμα) μετασχηματίζεται σε γινόμενο.

Η διαδικασία παραγοντοποίησης πολυωνύμου είναι ακριβώς αντίστροφη του πολλαπλασιασμού των πολυωνύμων.

Στον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων:

π.χ. $5xy\cdot(5x+6y-2x^2y^3)=25x^2y+30xy^2-10x^3y^4$

Ενώ στην παραγοντοποίηση:

π.χ. $25x^2y+30xy^2-10x^3y^4=5xy\cdot(5x+6y-2x^2y^3)$

Άρα στην παραγοντοποίηση μετατρέπουμε **ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΑ** πολυωνύμων.

Η παραγοντοποίηση είναι ένα από τα σπουδαιότερα προβλήματα των μαθηματικών. Με αυτή συντομεύουμε τις πράξεις των αλγεβρικών παραστάσεων, απλοποιούμε ρητές παραστάσεις, επιλύουμε εξισώσεις κ.τ.λ.

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο εξετάζουμε αν μπορεί να εφαρμοστεί μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Κοινός παράγοντας είναι ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών των όρων του πολυωνύμου. Επιπλέον ένα μονώνυμο (ή πολυώνυμο) μπορεί να βγει κοινός παράγοντας, αν εμφανίζεται σε κάθε όρο και βγαίνει με εκθέτη τον μικρότερο από τους εκθέτες που εμφανίζεται σε κάθε όρο, ακολουθώντας την επιμεριστική ιδιότητα (δηλαδή αν οι όροι του πολυωνύμου έχουν δυνάμεις του ίδιου γράμματος (μεταβλητής), τότε η δύναμη του γράμματος αυτού με τον μικρότερο εκθέτη είναι κοινός παράγοντας των όρων του πολυωνύμου).

Αν όλοι οι όροι του πολυωνύμου έχουν κοινό παράγοντα γράφουμε τον κοινό παράγοντα έξω από την παρένθεση και μέσα στην παρένθεση γράφουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης του πολυωνύμου με τον κοινό παράγοντα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3 = x\cdot(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$

2. $x^3y^3-x^2y^5+3x^3y^4 = x^2y^3\cdot(xy-xy^2+3xy)$

3. $12x^2y-8xy^2-4xy\omega = 4xy\cdot(3x-2y-\omega)$

   Μ.Κ.Δ.(12,8,4)

4. $48\alpha^2xy+96\,\alpha^3x^2y^2-240\alpha xy = 48\alpha xy\cdot(\alpha+2\alpha^2xy-5)$

   Μ.Κ.Δ.(48,96,240)

Εάν δεν μπορώ να βρω σύντομα το Μ.Κ.Δ. των 48,96,240 τους αναλύω σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και παίρνω τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη.

48	2	96	2	240	2
24	2	48	2	120	2
12	2	24	2	60	2
6	2	12	2	30	2
3	3	6	2	15	3
1		3	3	5	5
		1		1	

Άρα: $48=2^4\cdot 3$

$96=2^5\cdot 3$

$240=2^4\cdot 3^5$

Μ.Κ.Δ.(48, 69, 240)= $2^4\cdot 3=48$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν ένας όρος βγαίνει ολόκληρος κοινός παράγοντας (χωρίς το πρόσημό του) στη θέση του μένει το +1 ή το -1 ανάλογα με το πρόσημο του.

π.χ.

$2\alpha^2\beta^2-\alpha^4-\alpha^2= \alpha^2\cdot(2\beta^2-\alpha^2-\mathbf{1})$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παρακάτω παραστάσεις:

1. $12bx - 16by - 4az$
2. $xy^2z^3 - x^3y^2z + xy^3z^2$
3. $5α^2x - 10αxy + 20αxw$
4. $3μx^2y - 12vxy^2 + 21μvxy$
5. $αx + bx - γx + α^2x$
6. $4α^3+10α^2-2α^5+6α^3$
7. $α^2βγ-αβ^2γ+αβγ^2$
8. $12αx^3+3αx^2y- 12αxy^2$
9. $12α^2β+6αβ^3-18α^2β^4$
10. $(α+β)\ x + (α+β)\ y$
11. $(α+β)\ x - (α+β)\ y$
12. $(α+β)\ x + (-α-β)\ y$
13. $(α+β)\ x - (-α-β)\ y$
14. $(x^2-y^2)\ ω - (x^2-y^2)\ α$
15. $αβ\ (xy-ω) + (xy-ω)$
16. $x\ (α+2β) - 15\ (-α-2β)$
17. $α(3yx+ω) - β\ (3xy+ω)$
18. $(3x-1)\cdot(y+2) – (3x-1)\cdot(y-2)$
19. $(5α+β)\cdot(β-1) + (-5α-β)\cdot(β-1)$
20. $(4α-3)\cdot(2x-5) - (4α-3)\cdot(3x-2)$
21. $(2x+3)\ (y-1) - 2(2x+3)(3y-5) - (y-2)(2x+3)$
22. $(γ-α-β)(2α-β)-(α+β-γ)(α+β)$
23. $5(x-y)^4ω - 2(x-y)^2ωz - 7(x-y)ωz^2$
24. $(3x-2y)^2 - 5ω(3x-2y)$
25. $x(α+β) + 5(-α-β)2$
26. $2(α+β)^3 - 3(α+β) + 5(-α-β)^2$
27. $3x(α+β)^5 - (-α-β) + 2y(-α-β)^2$

2. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ (ώστε να εμφανίζονται κοινοί παράγοντες)

Κατά τη μέθοδο αυτή χωρίζουμε τους όρους του πολυωνύμου σε ΚΑΤΑΛΛΗΛΕΣ ΟΜΑΔΕΣ, με ίσο πλήθος όρων έτσι ώστε, αν βγάλουμε από τους όρους αυτούς (της κάθε ομάδας) κοινούς παράγοντες να εμφανίζεται μέσα σε κάθε παρένθεση το ίδιο πολυώνυμο. Τότε το πολυώνυμο των παρενθέσεων είναι πάλι κοινός παράγοντας και μπορεί να γίνει ξανά παραγοντοποίηση βγάζοντας μπροστά τον όρο αυτό από τη νέα μας παρένθεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$\underline{αx} + \underline{βx} + \underline{αy} + \underline{βy} = α(x+y)+ β(x+y) = (x+y)\ (α+β)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να μετατραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παρακάτω παραστάσεις:

1. $α^2 - 4α + αγ - 4γ$
2. $5αx - 4βx + 5αy - 4βy$
3. $α^2γ^2 – αγδ + αβγ – βδ$
4. $4αy - 2βy + 2αω - βω$

5. $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$
6. $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$
7. $bx^2 + b^2x + b + x$
8. $\alpha^2\gamma - \alpha^2\delta - \beta^2\delta + \beta^2\gamma$
9. $x^2 + y\omega - xy - x\omega$
10. $3\alpha^2\gamma^2 + \beta\delta + 3\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta$
11. $xy^2 + x - 1 - y^2$
12. $\alpha x+\alpha y-\lambda x-\lambda y$
13. $x^2+2x+\lambda x+2\lambda$
14. $x^2+xy+\mu x+\mu y$
15. $\lambda x^3-2\lambda x^2-\mu x+2\mu$

3. ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Αν το πολυώνυμο που θα παραγοντοποιηθεί αποτελείται από τρεις όρους, μπορεί να είναι ανάπτυγμα διωνύμου στο τετράγωνο. Στην περίπτωση αυτή το πολυώνυμο ανάγεται στη μορφή αυτή:

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2= (\alpha+\beta)^2$
$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2= (\alpha-\beta)^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$4x^2 -28x + 49 = \mathbf{(2x)^2 - 2\ (2x)\ 7 + 7^2 = (2x-7)^2}$

$\mathbf{\alpha^2\ -\ 2\ \alpha\ \beta\ +\ \beta^2\ =\ (\alpha-\beta)^2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να αναλυθούν σε γινόμενο παραγόντων τα παρακάτω:

1. $\alpha^2+2\alpha+1$
2. x^4+2x^2+1
3. $4x^2+4x+1$
4. $9x^2-12\alpha x +4\alpha^2$
5. $81x^4-36x^2+4$
6. $\omega^6-6\omega^3+9$
7. $64\alpha^4-80\alpha^2\beta\gamma^2+25\beta^2\gamma^4$
8. $4\alpha^2-2\alpha+\frac{1}{4}$
9. $9\alpha^4\beta^2-6\alpha^2\beta\gamma+\gamma^2$
10. $9\alpha x^2+24\alpha xy+16\alpha y^2$

4. ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

$\mathbf{\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha+\beta)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$25x^2- 9y^2 = (5x)^2- (3y)^2= (5x-3y)\cdot(5x+3y)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $25-x^2$
2. $ω^2-1$
3. $4x^2-9ω^2$
4. $16α^2-4β^2$
5. x^4-y^4
6. $9β^2-γ^2$
7. $25α^2x^2-4y^2$
8. $4α^2β^2-9γ^2δ^2$
9. $α^2β^2-49γ^2$
10. $3x^2-12y^2$
11. $75x^2-49ω^2$
12. x^4-25
13. $(3x+y)^2-25$
14. $(α+β)^2-γ^2$
15. $(x-y)^2-4α^2$
16. $100-(3α-β)^2$
17. $9 - (x+y)^2$
18. $16x^2y^6-(2x+y)^2$
19. $(5μ+ν)^2- (μ-3ν)^2$
20. $5(x+y)^2- 20(2x-y)^2$
21. $(α+β-γ)^2- (2α+β+5γ)^2$

5. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ

Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε περισσότερες από μία από τις προηγούμενες μεθόδους για να αναλύσουμε ένα πολυώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$2x^2-32= 2(x^2-16) = 2(x^2-4^2) = 2(x-4)(x+4)$

Αρχικά κάνουμε Κοινό Παράγοντα και μετά Διαφορά Τετραγώνων!!!

ΠΡΟΣΟΧΗ: (ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΜΕΘΟΔΟΥ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $15x^2 -15$
2. $5α^3 -5αx^2$
3. $xy^4 -25x$
4. $8α^2β^2 -50α^2γ^2$
5. $(α+1) (α-2) +(α-2)^2 +(α^2-4)$
6. $(α+1) (2-α)+(α-2)^2 +(α^2-4)$
7. $(α-2β)(α+β) -(α-2β)^2 -(α^2-4β^2)$
8. $(x^2-y^2) -(2x+y)(y-x)$
9. $α^2 -b^2 -2^α +2b$
10. $2xy -1 +x^2 +y^2$
11. $9(ω-2)^2 -(ω+2)^2$
12. $36(χ+y)^2 -81(2x-3y)^2$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για να παραγοντοποιήσεις ένα πολυώνυμο πρώτα θα εξετάσεις αν υπάρχει κοινός παράγοντας από όλους τους όρους. Τον παράγοντα αυτόν αν υπάρχει τον βγάζεις έξω από την παρένθεση και θα εξετάσεις αν το πολυώνυμο που προκύπτει παραγοντοποιείται με μία από τις άλλες περιπτώσεις που αναφέρθηκαν.

2. Αν ένα πολυώνυμο έχει δύο όρους υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να είναι διαφορά τετραγώνων ή άθροισμα ή διαφορά δυνάμεων με περιττό εκθέτη.

3. Αν ένα πολυώνυμο έχει τρείς όρους υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να είναι τέλειο τετράγωνο ή τριώνυμο.

4. Άθροισμα δύο τετραγώνων δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. π.χ. $χ^2+y^2$, $α^2+1$ δεν αναλύονται σε γινόμενο παραγόντων.

5. Αν ένας όρος βγαίνει ολόκληρος κοινό παράγοντας, χωρίς το πρόσημο του, στη θέση του μένει το +1 ή το -1 ανάλογα με το πρόσημο του όρου.

   π.χ. $3χ^3+χ^2= χ^2(3χ\mathbf{+1})$

6. **ΠΡΟΣΟΧΗ** στα παρακάτω:
   $-(α-β)=-α+β = β-α$
   $-(-α-β) = +α+β = α+β$
   $(-α-β)^2= [-(α+β)]^2 = (α+β)^2$
   $(α-β)^2= [-(-α+β)]^2 = (-α+β)^2 =(β-α)^2$
   $(-α-β)^3= [-(α+β)]^3 = -(α+β)^3$
   $(α-β)^3= [-(-α+β)]^3 = -(-α+β)^3 = -(β-α)^3$

1. $β-α= -(α-β)$
2. $α+β=-(-α-β)$
3. $(-α-β)^2=(α+β)^2$
4. $(α-β)^2=(β-α)^2$
5. $(-α-β)^3=-(α+β)^3$
6. $(α-β)^3= -(β-α)^3$

7. Μερικές παραγοντοποιήσεις γίνονται, αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε στο πολυώνυμο έναν κατάλληλο αριθμό.
   π.χ.
   $4α^4+β^4=$

$=(2\alpha^2)^2+(\beta^2)^2=$
$=(2\alpha^2)^2+(\beta^2)^2$ $\mathbf{+4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2}$$=$
$= [(2\alpha^2)^2+ (\beta^2)^2 +4\alpha^2\beta^2]- 4\alpha^2\beta^2=$
$=(2\alpha^2+\beta^2)^2- (2\alpha\beta)^2=$
$= (2\alpha^2+\beta^2- 2\alpha\beta)(2\alpha^2+\beta^2+ 2\alpha\beta)$

8. Μερικές παραγοντοποιήσεις γίνονται αν διαπιστώσουμε έναν όρο σε άθροισμα δύο άλλων.
   π.χ.

Να προσέχετε τη διαφορά στις ταυτότητες $(\alpha+\beta)^3$ και $\alpha^3+\beta^3$

9. Να προσέχετε ότι $\alpha^2-\beta^2= (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ και ΟΧΙ $\cancel{(\alpha-\beta)^2}$

(Η μέθοδος της παραγοντοποίησης τριωνύμου θα διδαχθεί στο Κεφάλαιο 2)